## **培优课14 几何法求空间角与空间距离**

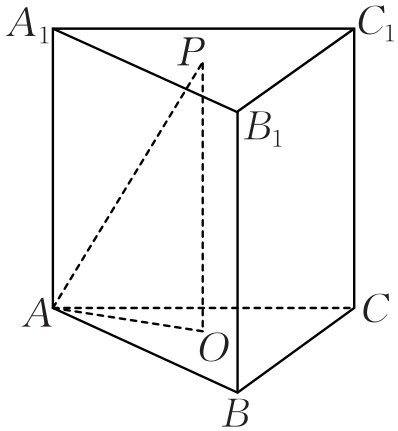
### **培优点一 几何法求空间角（线面角）**

#### **审题指导**

典例1 已知（审题①推出直棱柱性质），（审题②确定高）.（审题③确定线面角的位置），则与平面所成角的大小为.

**解题观摩**

[解析]如图所示，设为的中心，连接,,，…………审题①



，…………审题③

所以，所以，

【提醒】等边三角形的面积为，其中为边长.

.…………审题②

又，所以,故 .故与平面所成角的大小为 .

#### **通性通法**

求直线与平面所成角的关键是寻找过直线上一点与平面垂直的垂线，垂足与斜足的连线为直线在平面内的射影，直线与直线在平面内射影所成的角为线面角，然后转化为解三角形问题，进而求解.

#### **培优训练**

##### **将三棱柱改为正方体条件变式**

1. 在正方体中，为棱上的一点，且，为棱的中点，且平面与交于点，则与平面所成角的正切值为( C ).

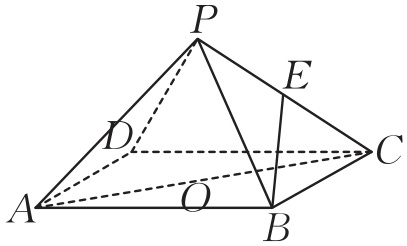
A. B. C. D.

[解析]因为平面平面，所以与平面所成角为与平面所成角，易知与平面所成角为.设，则，，平面 平面，且平面，可知，易得，则，即，解得，则，

在中，，故与平面所成角的正切值为.故选.

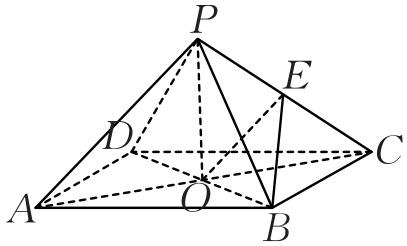
##### **将三棱柱改为正四棱锥条件变式**

2. 如图，正四棱锥的体积为2，底面积为6，为侧棱的中点，则直线与平面所成的角为( A ).



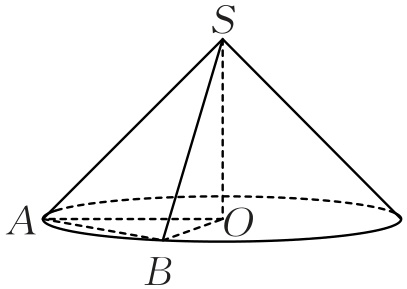
A. B. C. D.

[解析]如图，在正四棱锥中，根据底面积为6可得，.连接交于点，连接，则为正四棱锥的高，根据体积公式可得，.因为 底面，所以，又，， 平面， 平面,所以 平面，连接，则为直线与平面所成的角.在中，因为，，所以，，在中，因为，所以，即 .故直线与平面所成的角为 .故选.



##### **运用线面角求圆锥的侧面积综合变式**

3. 已知圆锥的顶点为，母线，所成角的余弦值为，与圆锥底面所成的角为 ，若的面积为，则该圆锥的侧面积为.

[解析]

如图，与圆锥底面所成角为 ，为等腰直角三角形.设，则，.在中，，

，，解得，

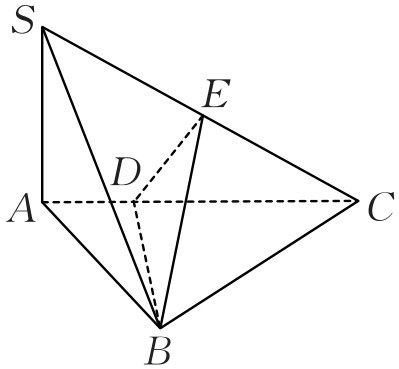
，即母线长，

.

### **培优点二 几何法求空间角（二面角）**

#### **审题指导**

典例2 如图，在三棱锥中，（审题①可以确定线线垂直），，（审题②得到）且分别交，于点，，又，（审题③由等腰三角形推出垂直），则二面角的大小为.



**解题观摩**

[解析]且是的中点，,…………审题③

又，，， 平面，

平面，

.…………审题② 又 平面， 平面，

，…………审题①

而， 平面， 平面，

平面 平面， 平面，

，，，…………审题

平面，，.

设，则，，

，， ，

又， ，即所求的二面角的大小为

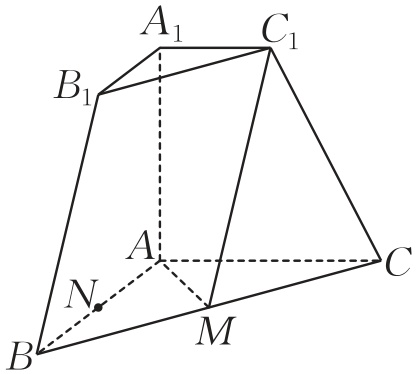
#### **通性通法**

求二面角是常见题型，根据所求的二面角的两面是否有公共棱可分为两类：有棱二面角、无棱二面角.对于有棱二面角通常采用定义法或三垂线法等手段来作出二面角的平面角，转化为解三角形问题，进而求解.而对于无棱二面角，一般通过延展平面找到公共棱使其转化为有棱二面角，或用面积射影定理若多边形的面积为，它在一个平面内的射影图形的面积为，且多边形所在平面与该平面所成的二面角为 ，则解题（如条件变式2）.

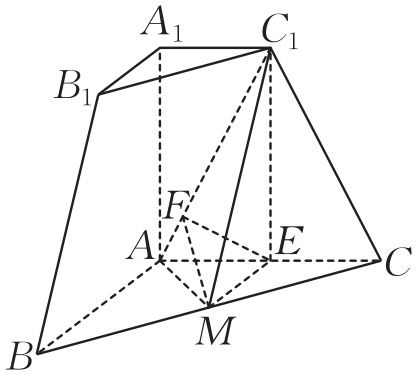
#### **培优训练**

##### **将三棱柱改为三棱台条件变式**

1. [2023·天津卷节选]如图，在三棱台中，若 平面,,,，,分别是,的中点，则平面与平面所成的角的余弦值为.



[解析]如图，连接,过点作，垂足为，过点作，垂足为,连接,.

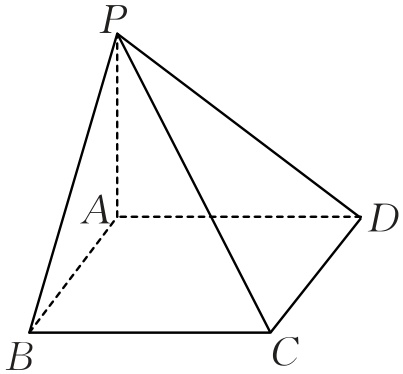


因为 平面， 平面，所以，又，， 平面, 平面，所以 平面.因为 平面，所以，又，， 平面, 平面，所以 平面，因为 平面，所以，所以平面与平面所成的角为.又，，所以，即.在中， ，则，故.

##### **将有棱二面角改为无棱二面角条件变式**

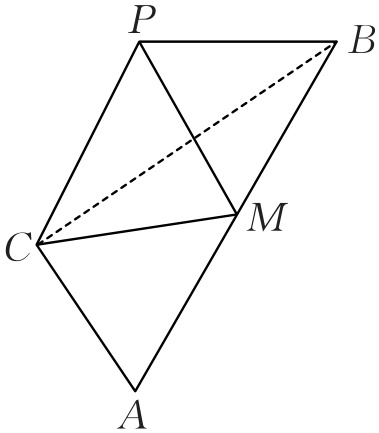
2. 在四棱锥中，四边形为正方形， 平面，，则平面与平面所成的二面角的大小为.

[解析]如图， 平面， 平面，，又，且， 平面， 平面， 平面，同理, 平面， 平面,在平面上的射影为，,设平面与平面所成二面角为 ，， .故平面与平面所成二面角的大小为 .

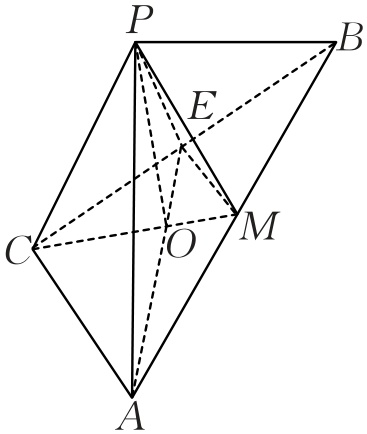


##### **运用二面角的大小求线段比值设问变式**

3. 在中， ，，为的中点，现将沿折起，得到三棱锥，如图所示,则当二面角的大小为 时，.



[解析]如图，取的中点，连接，，，设，连接，再设，由 ，，可得.在中，可得，在中，可得，,则 ，，



，，为二面角的平面角，

.

，，.在中，由余弦定理可得

，

，即.

又为的中点，.

在中，易得，.

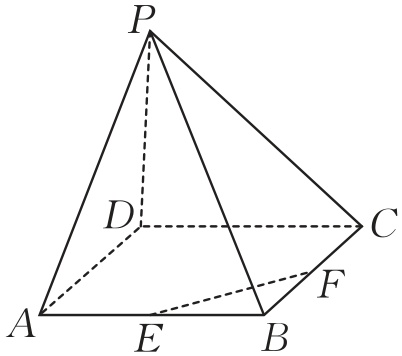
### **培优点三 几何法求空间距离（点线距）**

#### **审题指导**

典例3 （改编）如图，已知正方形的边长为1,（审题①由线面垂直得到线线垂直），且,.（审题②由中位线推导垂直）

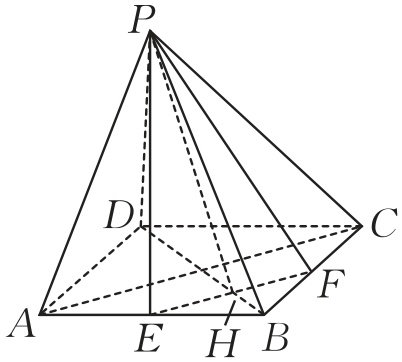
（1）求点到直线的距离；

（2）求.（审题③同一个三角形考虑等面积法）



**解题观摩**

[解析]（1）如图，连接，交于点，连接，,，



在正方形中，，分别为，的中点，

，…………审题②

又因为 平面，，…………审题①

即的长度就是点到直线的距离.

因为，且由正方形的边长为1,可知，

即，所以在中，由勾股定理得,,

即点到直线的距离是.

（2）连接,,如图，由这个几何体的性质，可以解得，，设点到直线的距离为,由三角形的等面积法得

.…………审题③

#### **通性通法**

**求点到直线的距离的三种方法**

1.直接法：一般可以通过三垂线定理作出点到直线的垂线,则垂线段的长度就是点到直线的距离，确定一个平面三角形，利用勾股定理求其距离.

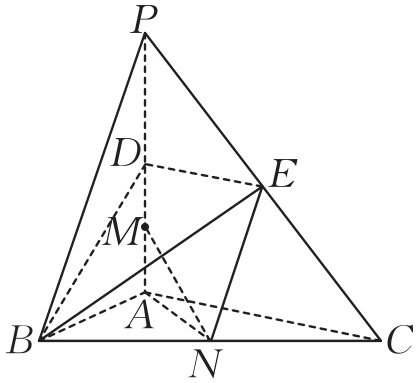
2.转化法：由点与直线确定一个平面三角形，把点到线的距离转化为求三角形的角，再用正弦函数求出点到直线的距离.

3.等面积法：由点与直线确定一个平面三角形，若所求的点到直线的垂线不好作图，则可以利用第一种方法先作出这个三角形另一条边上的高，再用等面积法求解.

#### **培优训练**

##### **利用解三角形求距离综合变式**

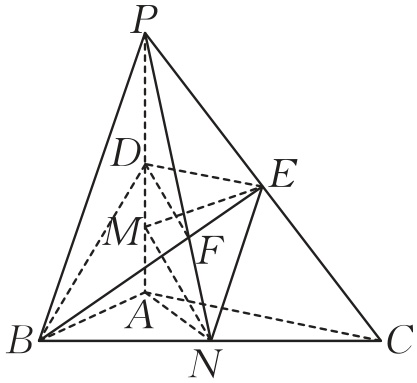
1. （改编）如图，在三棱锥中， 底面， .，，分别为棱，，的中点，是线段的中点，，.



（1）求证：平面.

（2）求点到直线的距离.

[解析]（1）如图，连接交于，连接,,



由于,分别是,的中点，

所以为的重心，即,

又因为为的中点，是线段的中点，所以，

即，所以，

因为 平面， 平面，所以平面.

（2）由 底面， ，，，

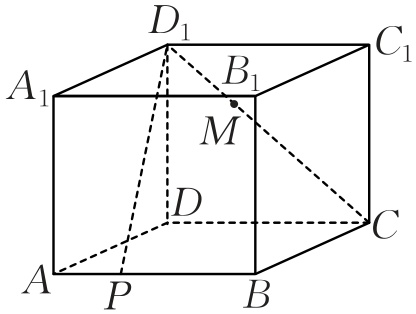
可得，所以,,,

在中，由余弦定理可得,，即.

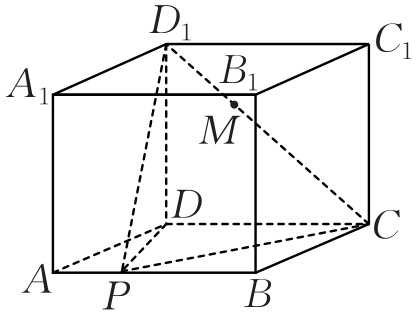
故点到直线的距离.

##### **利用勾股定理求距离综合变式**

2. 如图，直四棱柱的底面为平行四边形，，，，分别为，上靠近,的三等分点.求点到直线的距离.



[解析]如图，连接， 底面为平行四边形，，，且为上靠近的三等分点，



可由三角形余弦定理得

，

，

在直四棱柱中，可得和都是直角三角形，

由勾股定理得,，则，

即在中，由余弦定理得，可得,又为上靠近点的三等分点，

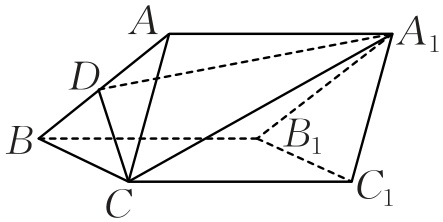
.

故点到直线的距离.

### **培优点四 几何法求空间距离（点面距）**

#### **审题指导**

典例4 如图，在三棱柱中，（审题①得到线线垂直），（审题②等腰三角形三线合一），,.



（1）求证：（审题③面面垂直先证线面垂直）.

（2）求（审题④观察图形选择等体积法求解）.

**解题观摩**

[解析]（1）因为在三棱柱中， 平面， 平面，

，…………审题①

又因为是的中点,,

,…………审题②

因为,，…………审题③

又 平面，所以平面 平面

（2）由题意可知，是的中点，,,.

设点到平面的距离为，因为，

，…………审题④

所以

，解得，

即点到平面的距离为.

#### **通性通法**

**求点到平面的距离的三种方法**

1.直接法：过点作平面 的垂线,垂足为,把放在某个三角形中,解三角形求出的长度（即点到平面 的距离）.

2.转化法：若点所在的直线平行于平面 ,则可转化为直线上某一个点到平面 的距离来求.

3.等体积法：求点到平面的距离可以转化为求棱锥的高,如四面体中点到平面的距离,用等体积法求得.

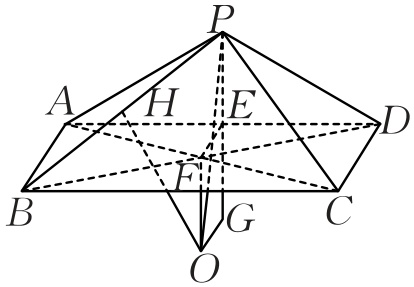
#### **培优训练**

##### **结合球的截面圆的性质综合变式**

1. 已知四棱锥的底面是矩形，，，， .若四棱锥的外接球的体积为，则该球上的点到平面的距离的最大值为( C ).

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

[解析]如图，在矩形中，连接对角线，，记，则为矩形的外接圆圆心，



设，在中，由余弦定理得，，即，的外接圆半径为，

记的外接圆圆心为，则，取的中点，连接，，

显然，，，且，，共线，

因为，，，所以 平面，

即 平面， 平面，

所以，又, 平面, 平面，所以 平面，

过点作 平面，使，连接，

于是，则四边形为矩形，则，则 平面，

根据球的性质，得为四棱锥外接球的球心，连接,

因为球的体积为，

所以，

解得，

而，在中，，

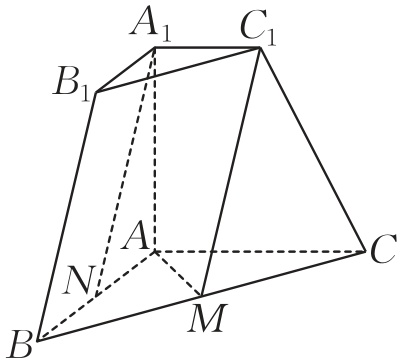
因此外接圆直径，

取的中点为，连接，显然为外接圆圆心，则 平面，且，

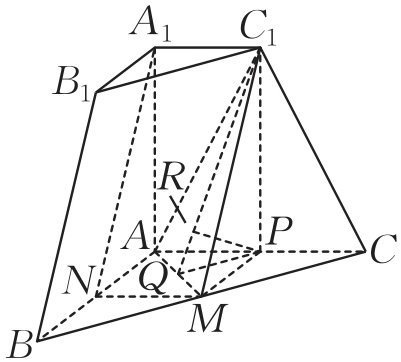
所以四棱锥的外接球上的点到平面的距离的最大值为8.故选.

##### **将三棱柱改为三棱台条件变式**

2. [2023·天津卷节选]（一题多解）在三棱台中，若 平面,,,，,分别是,的中点，则点到平面的距离为.



[解析]（法一：几何法）如图，过点作，垂足为，作，垂足为，连接,，过作，垂足为.



由题可得，，得，根据勾股定理，得，因为 平面， 平面，所以，又，， 平面, 平面，所以 平面.又 平面，所以，又，， 平面, 平面，所以 平面.在中，，又，所以点到平面的距离是到平面的距离的两倍，即点到平面的距离是.

（法二：等体积法）设点到平面的距离为，则

，

.

由，得，即.